3–4 LIMIT HAQIDA TUSHUNCHA

x ning qiymatlari 2 dan kichik bo‘lib, 2 ga yaqinlasha borganda $f(x)=x^2$ funksiyaning qiymatlari jadvalini qaraylik:

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	1	3,61	3,9601	≈ 3,996 00	≈ 3,999 60

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, x ning qiymatlari 2 ga qancha yaqin bo‘laversa (*yaqinlashsa*), $f(x)$ funksiyaning mos qiymatlari ham 4 soniga yaqinlashaveradi.

Bunday holatda x argument (o‘zgaruvchi) 2 ga *chapdan yaqinlashganda* $f(x)$ ning qiymatlari 4 soniga *yaqinlashadi* deymiz.

Endi x ning qiymatlari 2 dan katta bo‘lib, 2 ga yaqinlasha borganida $f(x)=x^2$ funksiyaning qiymatlari jadvalini qaraylik:

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	9	4,41	4,0401	≈ 4,004 00	≈ 4,000 40

Bunday holatda x argument 2 ga *o‘ngdan yaqinlashganda,* $f(x)$ funksiya qiymatlari 4 soniga *yaqinlashadi* deymiz.

Yuqoridagi ikki holatni umumlashtirib, x argument 2 ga *yaqinlashganda,* $f(x)$ ning qiymatlari 4 soniga *yaqinlashadi* deymiz va buni quyidagicha yozamiz:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Bu yozuv shunday o‘qiladi: x argument 2 ga yaqinlashganda, $f(x) = x^2$ funksiyaning *limiti* 4 ga teng.

Umumiy holda *funksiya limiti* tushunchasiga quyidagicha yondashiladi:

$x \neq a$ bo‘lib, uning qiymatlari a soniga yaqinlashsa, $f(x)$ ning mos qiymatlari A soniga *yaqinlashsin.* Bu holda A sonni x a ga *yaqinlashganda* $f(x)$ funksiyaning *limiti* deyiladi va bunday belgilanadi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Ayrim hollarda mazkur holatni x ning qiymatlari a ga *intilganda* $f(x)$ funksiya A ga *intiladi,* deymiz.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ yozuv o‘rniga $x\to a$ da $f(x)\to A$ yozuv ham qo‘llaniladi.

Eslatma. x ning qiymati a ga *intilganda* $x\neq a$ sharti bajarilishining muhimligini aytib o‘tish joiz.

Misol. $x\to 0$ bo‘lganda $f(x)=\dfrac{5x+x^2}{x}$ funksiyaning limitini toping.

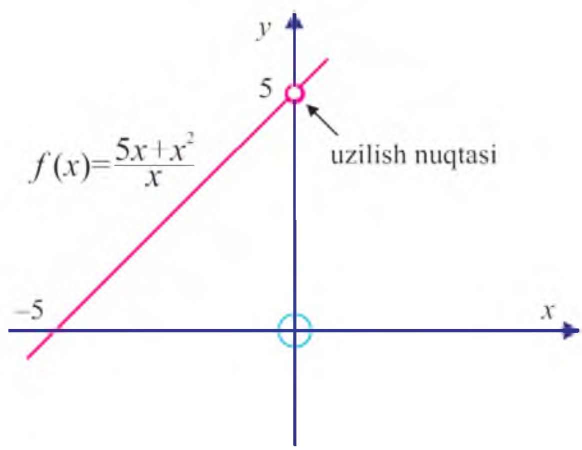
△ $x\neq 0$ sharti bajarilmasin, ya’ni $x=0$ bo‘lsin. $x=0$ qiymatni $f(x)$ ga bevosita qo‘yib ko‘rsak, $\dfrac{0}{0}$ ko‘rinishdagi *aniqmaslikka* ega bo‘lamiz.

Boshqa tomondan, $f(x)=\dfrac{x(5+x)}{x}$ bo‘lgani uchun bu funksiya ushbu

$$f(x)=\begin{cases}5+x, & \text{agar } x\neq 0 \text{ bo‘lsa}\\ \text{aniqlanmagan}, & \text{agar } x=0 \text{ bo‘lsa,}\end{cases}$$

ko‘rinishni oladi.

$y=f(x)$ funksiyaning grafigi (0; 5) koordinatali nuqtasi “olib tashlangan” $y=x+5$ to‘g‘ri chiziq ko‘rinishida bo‘ladi (11-rasm):



11-rasm.

(0; 5) koordinatali nuqta $y=f(x)$ funksiyaning *uzilish nuqtasi* deyiladi.

Ko‘rinib turibdiki, bu nuqtadan farqli bo‘lgan nuqtalarda x ning qiymatlari 0 ga *yaqinlashganda* $f(x)$ funksiyaning mos qiymatlari 5 ga yaqinlashadi, ya’ni uning *limiti* mavjud:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+x^2}{x}=5.$$ ▲

Amalda, funksiya limitini topish uchun, lozim bo‘lsa, tegishli soddalashtirishlarni bajarish maqsadga muvofiq.

1-misol. Limitlarni hisoblang:

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$.

△ a) x ning qiymatlari 2 ga *yaqinlashganda* x^2 ning qiymatlari 4 ga yaqinlashadi, ya’ni $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

b) $x \neq 0$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+3)=3.$$

c) $x \neq 3$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6.$$ ▲

Mashqlar

Limitni hisoblang (**8–11**):

8. a) $\lim\limits_{x\to 3}(x+4)$; b) $\lim\limits_{x\to -1}(5-2x)$; c) $\lim\limits_{x\to 4}(3x-1)$

d) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2-3x+2)$; e) $\lim\limits_{h\to 0} h^2(1-h)$; f) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+5)$.

9. a) $\lim\limits_{x\to 5} 5$; b) $\lim\limits_{h\to 2} 7$; c) $\lim\limits_{x\to 0} c$, c – o‘zgarmas son.

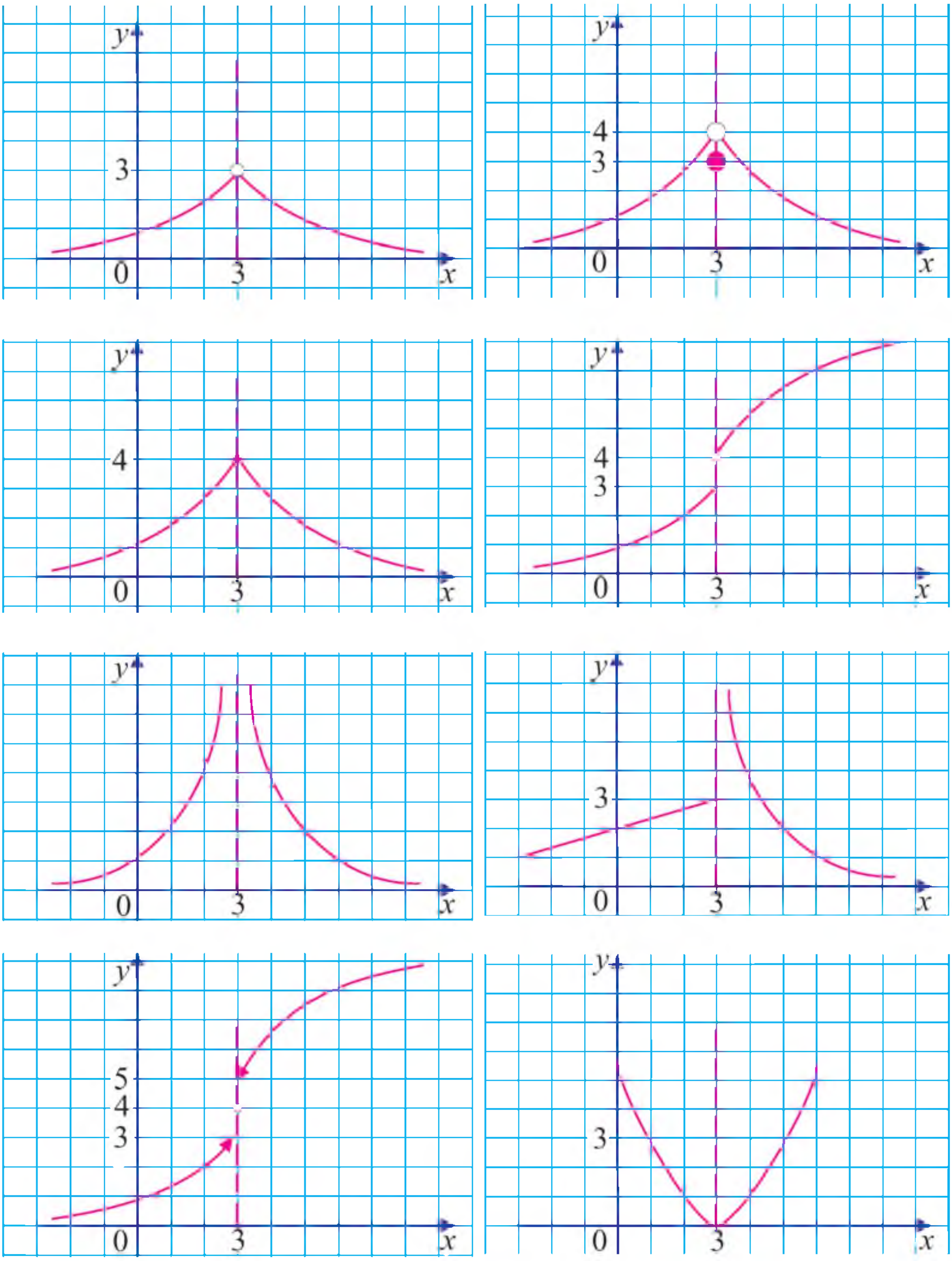
10. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x}{x}$; b) $\lim\limits_{h\to 2}\frac{h^2+5h}{h}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x+1}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$.

11. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x}$.

d) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{2h^2+6h}{h}$; e) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{3h^2-4h}{h}$; f) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^3-8h}{h}$;

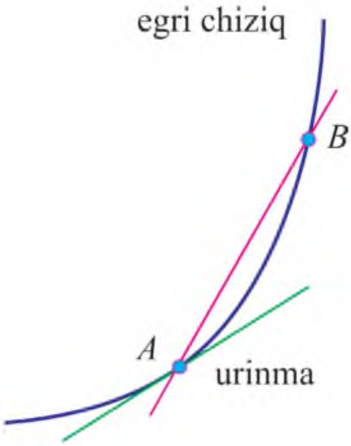
g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}$; h) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x-2}$; i) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$.

12. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $x \to 3$ da limitga ega? Shu limitni toping.

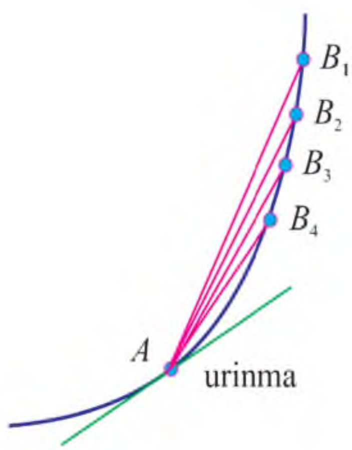


5–6 HOSILA, UNING GEOMETRIK VA FIZIK MA'NOSI

12-rasmda egri chiziq, kesuvchi va urinma tasvirlangan.



12-rasm.

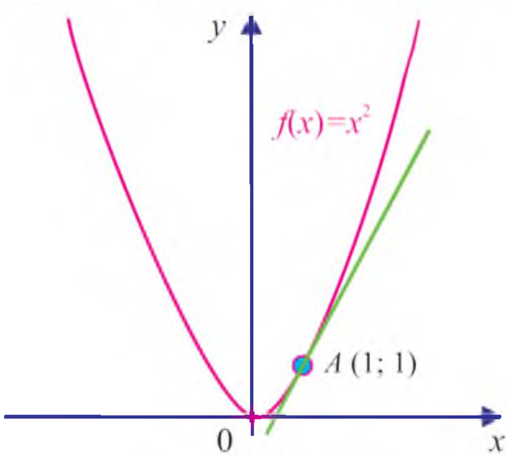


13-rasm.

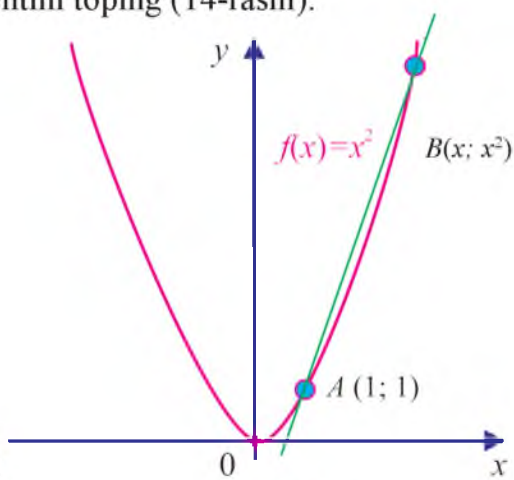
B nuqta B_1, B_2, ... holatlarni ketma-ket qabul qilib, *A* nuqtaga *egri chiziq bo'ylab* yaqinlashsa (13-rasm), mos kesuvchilarning egri chiziqqa *A* nuqtada o'tkazilgan urinma holatini olishga intilishini *intuitiv tarzda* qabul qilamiz.

Bu holda, ravshanki, *AB* to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti urinmaning burchak koeffitsiyentiga yaqinlashadi.

1-misol. $f(x) = x^2$ funksiyaning grafigiga $A(1;\ 1)$ nuqtada urinadigan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping (14-rasm).



14-rasm.



15-rasm.

△ $f(x) = x^2$ funksiyaning grafigiga tegishli ixtiyoriy $B(x, x^2)$ nuqtani qaraylik (15-rasm).

AB to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ yoki $\frac{x^2-1}{x-1}$ ga teng.

B nuqta A nuqtaga egri chiziq bo‘ylab yaqinlashganda, x ning qiymati 1 ga yaqinlashadi, bunda $x \neq 1$.

Demak, AB to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti urinmaning burchak koeffitsiyenti k ga yaqinlashadi, ya’ni:

$$k = \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to1}(x+1) = 2 \cdot$$

Shunday qilib, $k = 2$. ▲

$y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Uning grafigiga tegishli bo‘lgan $A(x; f(x))$ va $B(x+h; f(x+h))$ nuqtalarni qaraylik (16-rasm).

AB to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti

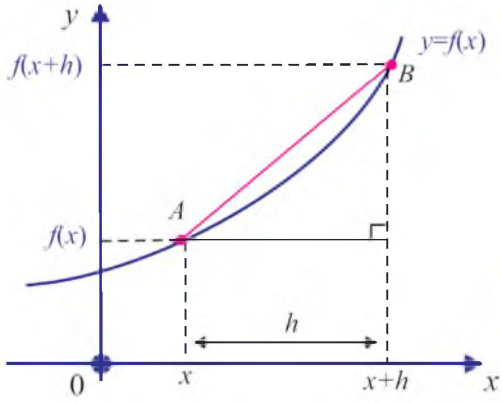
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ayirmali nisbatga teng.

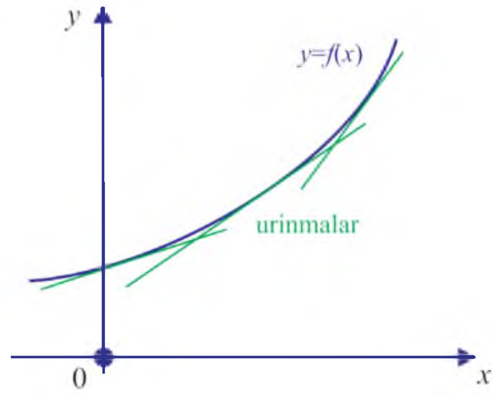
B nuqta A nuqtaga egri chiziq bo‘ylab yaqinlashganda $h\to0$, ya’ni h orttirma nolga intiladi, AB kesuvchi esa funksiya grafigiga A nuqtada o‘tkazilgan urinmaga intiladi.

Shu bilan birga, AB to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti urinmaning burchak koeffitsiyentiga yaqinlashadi.

Boshqacha aytganda, h ning qiymati 0 ga intilganda ixtiyoriy $(x; f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ayirmali nisbatning limit qiymatiga, ya’ni $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ qiymatga teng bo‘ladi.



16-rasm.



17-rasm.

x ning mazkur limit mavjud bo‘lgan ixtiyoriy qiymatiga funksiya grafigiga $(x, f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentining yagona qiymatini mos qo‘yish mumkin (17-rasm).

Demak, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ formula yangi funksiyani ifodalaydi.

Mana shu funksiya $y=f(x)$ funksiyaning **hosilaviy funksiyasi**, yoki sodda qilib **hosilasi** deb ataladi.

Ta’rif. $y=f(x)$ funksiyaning **hosilasi** deb quyidagi limitga (agar u mavjud bo‘lsa) aytiladi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \qquad (1)$$

Odatda $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ kabi belgilanadi.
Hosilani topish amali *differensiallash* deyiladi.

$f'(x)$ belgilash o‘rniga $\dfrac{dy}{dx}$ kabi belgilash ham qabul qilingan.

Bu belgilashning “kasr” ko‘rinishda ekanligini quyidagicha tushuntirish mumkin.

Agar orttirmalarni $h=\Delta x$, $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$ deb belgilasak,

$f'(x)=\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dan quyidagiga ega bo‘lamiz (18-rasm): $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}$.

Bizni hizmatdan foydalanib qulay imkoniyatga ega bo‘ling!

Bizda maktablar uchun quydagi hujjatlar mavjud

1. **1-11-Sinflar uchun sinf soati ish reja va konspektlari**
2. **1-11-Sinflar uchun barcha fanlardan to‘garak hujjatlari**
3. **Sinf rahbar hujjatlari**
4. **Metodbirlashma hujjatlari**
5. **Ustama hujjatlari**
6. **1-11-Sinflar uchun barcha fanlardan konspektlar**
7. **1-11-Sinflar uchun Ish rejalar (Taqvim mavzu rejalar)**
8. **Darsliklarning elektron varianti**
9. **Maktab ish hujjatlari**
10. **Direktor ish hujjatlari**
11. **MMIBDO‘ ish hujjatlari**
12. **O‘IBDO‘ ish hujjatlari**
13. **Psixolog hujjatlari**
14. **Xotin-qizlar qo‘mitasi ish hujjatlari**
15. **Kutubxona mudirasi ish hujjatlari**
16. **Besh tashabbus hujjatlari**
17. **Ochiq dars ishlanmalar, taqdimotlar, slaydlar**